

ÜBUNGEN ZU ANALYSIS 1
Aufgaben des Tages 3 — 25. Oktober 2022

Aufgabe 1: ($1+1+1+1$ Punkte) Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gelten die *Anordnungsaxiome*:

(A1) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Eigenschaften:
 $x > 0$ (positiv) oder $x = 0$ (Null) oder $x < 0$ (negativ).

(A2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$.

(A3) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x \cdot y > 0$.

Weise nun folgende Ordnungseigenschaften in $\mathbb{R}$ nach (wobei jeweils $x, y, a \in \mathbb{R}$):

(a) Gilt $x < y$ und $a > 0$, so folgt $a \cdot x < a \cdot y$.

(b) Aus $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$ folgt $a \cdot x < b \cdot y$.

(c) Gilt $x < y$ und $a < 0$, so folgt $a \cdot x > a \cdot y$.

(d) Es gilt $1 > 0$.

Verwende hierzu jeweils *ausschließlich* die Ordnungsaxiome (A1)-(A3).

Aufgabe 2: (2 Punkte) Bestimme die Menge aller Elemente $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichungen

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad 2x \geq 6/5$$

gelten.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

abzählbar ist. Konstruiere hierzu zuerst eine geeignete Anordnung der *positiven* Elemente in

$$\mathbb{Q}_+ := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$